Y_{ij} : i-οστή τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής για την j δοκιμασία

$Y_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}$, ε_{ij} ανεξ. $N(0,\sigma^2)$ τμ., $i=1,\dots,n_j$, $j=1,\dots,r$, $n=\sum_{j=1}^{r} n_j$

$Y_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$, $\bar{Y}_{\cdot j} = Y_{\cdot j}/n_j$, $Y_{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$, $\bar{Y}_{\cdot\cdot} = Y_{\cdot\cdot}/n$

(α) Δεδομένα

Τύπος ζυμαρικών

Κατάστημα τροφίμων	1	2	3	4	Σύνολο
1	12	14	19	24	
2	18	12	17	30	
3		13	21		
Σύνολο	30	39	57	54	180
Δειγμ. μέσοι	15	13	19	27	18
Αρ. καταστημ.	2	3	3	2	10

(β) Συμβολισμοί

	Δοκιμασίες (j) (επίπεδα παράγοντα)				
Δειγμ. μονάδα (i)	1	2	3	4	Σύνολο
1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	
2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	
3		Y_{32}	Y_{33}		
Σύνολο	$Y_{\cdot 1}$	$Y_{\cdot 2}$	$Y_{\cdot 3}$	$Y_{\cdot 4}$	$Y_{\cdot\cdot}$
Δειγμ. μέσοι	$\bar{Y}_{\cdot 1}$	$\bar{Y}_{\cdot 2}$	$\bar{Y}_{\cdot 3}$	$\bar{Y}_{\cdot 4}$	$\bar{Y}_{\cdot\cdot}$
Μέγεθ. δείγματος	n_1	n_2	n_3	n_4	n

Πίνακας 6.1 *Δεδομένα ΑΒΕΖ: Πωλήσεις (αριθμός πακέτων του κιλού) ανά κατάστημα για κάθε ένα από τους τέσσερις τύπους ζυμαρικών.*

17/5/17

(Φυλλάδιο)

$H_0: \mu_1 = \dots = \mu_r$ v H_a: όχι όλα τα μ_j ίσα μεταξύ τους

$\min \sum_j \sum_i e_i^2 \Rightarrow \hat{\mu}_j = \bar{Y}_{\cdot j}$, $j = 1, \dots, r$

Υπόλοιπα: $e_{ij} = Y_{ij} - \hat{\mu}_j = Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot j}$

και $\sum_{i=1}^{n_j} e_{ij} = \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot j}) = 0$, $j = 1, \dots, r$.

Η Ανάλυση της Διακύμανσης

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot\cdot} = \bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot} + Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2 + \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot j})^2 +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})(Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot j})$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2 = \dots + 2 \sum_{j=1}^{r} (\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) \underbrace{\sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})}_{0}$$

$$= \dots + 2 \sum_{j=1}^{r} (\bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) \underbrace{(Y_{\cdot j} - n_j \bar{Y}_{\cdot j})}_{\underbrace{(Y_{\cdot j} - Y_{\cdot j})}_{0}}$$

Def

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij}-\bar{y}_{\cdot j})^2$$

$$SS_{tot} \quad = \quad SS_{tr} \quad + \quad SS_{res}$$

n όροι, $n-1$ β.ε. — r όροι, $r-1$ β.ε. — $(n-r)$ β.ε.

$$\sum_j\sum_i(y_{ij}-\bar{y}_{\cdot\cdot})=0, \quad \sum_{j=1}^{r}n_j(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot\cdot})=0$$

$$SS_{res}=\sum_{j=1}^{r}n_j(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot})^2$$

$$SS_{tot}=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_j}y_{ij}^2-\frac{y_{\cdot\cdot}^2}{n}$$

$$SS_{tre}=\sum_j\sum_i y_{ij}-\sum_{j=1}^{r}\frac{y_{\cdot j}^2}{n_j}$$

$$=SS_{tot}-SS_{tr}$$

ΑΝΑΔΙΑ

Προέλευση Μεταβλητότητας	Άθροισμα Τετραγώνων SS	Βαθμοί Ελευθερίας Β.Ε.	Μέσα Τετράγωνα MS
Διαφορές ή Μεταξύ Δειγμάτων ★	$SS_{tr} = \sum_{s=1}^{r} n_s(\bar{Y}_{\cdot s} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2$ (2ος) $= \sum_{s=1}^{r} \frac{Y_{\cdot s}^2}{n_s} - \frac{Y_{\cdot\cdot}^2}{n}$	$r-1$ (3)	$MS_{tr} = \frac{SS_{tr}}{r-1}$ (6ος)
Υπόλοιπα ή Εντός Δειγμάτων	$SS_{res} = \sum_{s=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} (Y_{is} - \bar{Y}_{\cdot s})^2$ (4ο) $= SS_{tot} - SS_{res}$	$n-r$ (6)	$MS_{res} = \frac{SS_{res}}{n-r}$ (7ος)
Ολική Μεταβλητότητα	$SS_{tot} = \sum_{s=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_s} (Y_{is} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2$ (3ο)	$n-1$ (9)	

★ απ. σελ. 211

$$E(MS_{tr}) = \sigma^2 + \frac{1}{r-1} \sum_{s=1}^{r} (\mu_s - \mu)^2 \quad (1)$$

$$E(MS_{res}) = \sigma^2 \quad (2)$$

$$\mu = \frac{\sum_{s=1}^{r} n_s \mu_s}{n} \quad (3)$$

Απόδειξη σχέσης (2)

$$\mathcal{E}(MS_{res}) = \mathcal{E}\left(\frac{SS_{res}}{n-r}\right) = \frac{1}{n-r}\,\mathcal{E}\left[\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij}-\bar{Y}_{\cdot j})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-r}\,\mathcal{E}\left[\sum_{j=1}^{r}(n_j-1)\cdot\underbrace{\frac{1}{n_j-1}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij}-\bar{Y}_{\cdot j})^2}_{S_j^2}\right]$$

$$= \frac{1}{n-r}\,\mathcal{E}\left[\sum_{j=1}^{r}(n_j-1)S_j^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-r}\sum_{j=1}^{r}(n_j-1)\,\mathcal{E}(S_j^2)$$

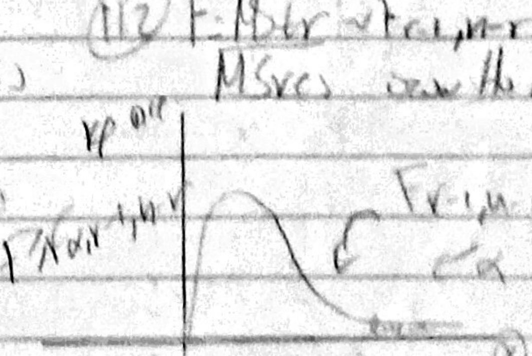
$$= \sigma^2$$

(σχήμα πίνακα)

Πηγή Μεταβλητότητας	Αθρ. Τετρ. SS	Βαθμοί Ελ. DF	Μέσα Τετρ. MS	F-test
...	...	...	... *	$F = \frac{MS_{tr}}{MS_{res}} \sim F_{r-1,n-r}$ όταν H_0 αληθ.

* 11.2

απορ. H_0, $11.2 > F_{0.05,3,30} = 4.26$



$$\frac{SS_{res}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-r}$$

$$\frac{SS_{tr}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{r-1} \text{ όταν } H_0 \text{ αληθεύει}$$

* π.χ. σελ. 211

Ανάλυση Μέσων Τιμών

$$\hat{\mu}_j = \bar{Y}_{\cdot j} \sim N\left(\mu_j, \frac{\sigma^2}{n_j}\right) \Rightarrow \frac{\bar{Y}_{\cdot j} - \mu_j}{\sqrt{MS_{res}/n_j}} \sim t_{n-r}$$

$(1-\alpha)100\%$ ΔΕ για μ_j: $\bar{Y}_{\cdot j} \pm t_{\alpha/2, n-r} \cdot \sqrt{MS_{res}/n_j}$

$H_0: \mu_u = \mu_v$ v $H_a: \mu_u - \mu_v \neq 0$

$$\frac{\bar{Y}_{\cdot u} - \bar{Y}_{\cdot v} - (\mu_u - \mu_v)}{\sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v}\right)}} \sim t_{n-r}$$

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ ΔΕ

$(1-\alpha)\cdot 100\%$ Δ.Ε. για $\mu_u - \mu_v$: $\bar{Y}_{\cdot u} - \bar{Y}_{\cdot v} \pm t_{\alpha/2, n-r} \sqrt{MS_{res}\left(\frac{1}{n_u} + \frac{1}{n_v}\right)}$

Εφαρμογή

$H_0: \mu_3 - \mu_4 = 0$ v $H_a: \mu_3 - \mu_4 \neq 0$, $\alpha = 0.05$

$u=3$, $v=4$, $n_3=3$, $n_4=2$, $\bar{Y}_{\cdot 3} = 14$, $\bar{Y}_{\cdot 4} = 27$

$$t = \frac{19 - 27 - 0}{\sqrt{7.07\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)}} = -3.164$$

$|t| \geq t_{0.025, 6}$ $(=2.447)$

απορ. H_0

Άσκηση 62 εκτός
Μέχρι 66 [illegible] άλλες